Módulo 3 Funciones

Estudio general de funciones: ceros, máximos, mínimos, puntos de inflexión, concavidad, convexidad, asíntotas...

Puede que tengamos dudas sobre el uso GeoGebra en el aula, pero, en el caso de las funciones, no hay excusa porque es una herramienta que nos facilita enormemente la labor como vamos a ver enseguida.

En primer lugar, escribiremos lo siguiente en la Entrada de la Vista Algebraica:

> a x + b (no son necesarios los espacios)

El programa dibuja la función (definiéndola como f(x)) y crea los parámetros a y b como deslizadores (que podemos redefinir en la configuración). Podéis probar esta técnica rápida y sencilla con cualquier función.

El estudio de la función es muy sencillo con GeoGebra.

- Para los ceros de la función tenemos la herramienta “Raíces” . Basta con clicar en la función. También podemos usar la herramienta “Intersección” clicando en el eje X y en la función. Es lo que haremos para los puntos de cortes con el eje Y.
- Para los extremos usaremos la herramienta “Extremos" . Puede no funcionar con determinadas funciones.
- Los intervalos con diferente signo de la función, crecimiento y decrecimiento o concavidad y convexidad se pueden visualizar de la siguiente manera:
    - Si(f>0,f)

- Si(f<0,f)
- Si(f’>0,f)
- Si(f’<0,f)
- Si(f’’>0,f)
- Si(f’’<0,f)

- GeoGebra crea cada vez una nueva función. El color lo podemos cambiar en la configuración de la función.
- Para las asíntotas utilizaremos el comando **Asíntota(Objeto)**. Caso de haber más de una asíntota estas aparecerán en una lista entre llaves {}. Para individualizar cada elemento escribiremos (si la lista es l1) l1(1), l1(2) … GeoGebra la interpretará como función.
- Los valores de la función se pueden calcular en la forma habitual: f(*valor*).

También podemos visualizar el proceso de dibujo de la función creando un punto sobre el eje de abscisas (sea por ejemplo P) y escribiendo (donde inf se interpreta como infinito):

> Función(f,-inf,x(P))

Animamos el punto P y vemos como se construye la función. En la Entrada escribimos:

> A = (x(P),f(x(P)) que será el punto de la función correspondiente a la abscisa de P.

Al punto A le podemos asignar una condición que puede depender del signo de la función, el de la derivada o el de la derivada segunda. Para ello, en la configuración del punto A, en la pestaña **Avanzado**, en la sección “**Color Dinámico**” definimos los colores del código RGB como mejor nos convenga. En el ejemplo, si la función en el punto A es positiva, el rojo tendrá el valor 1 y en caso contrario 0. Lo mismo pasará con el color azul cuando la función sea negativa. Las condiciones pueden ser aún más elaboradas mientras tengamos en cuenta la sintaxis de estas (no sirve escribir solo “A”).

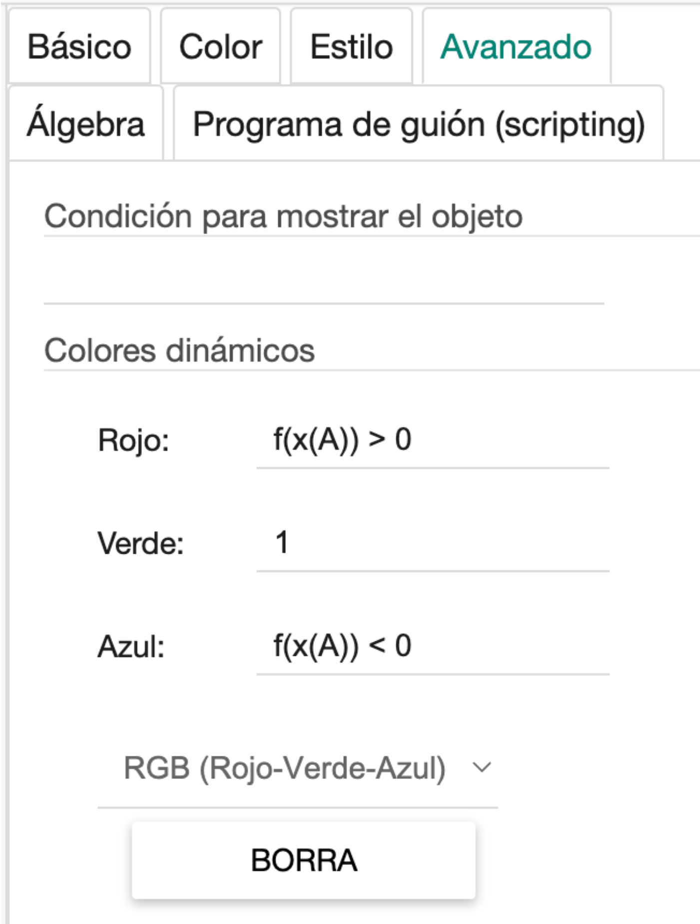
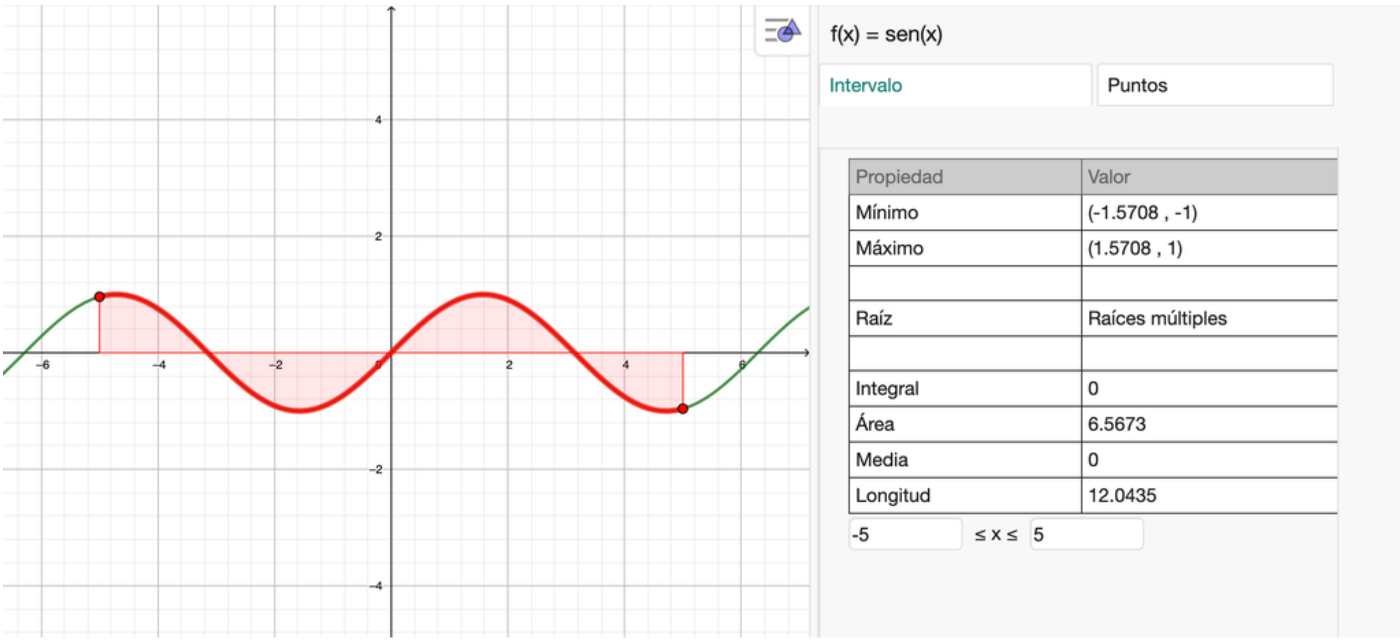


Fig. 3-1 Colores dinámicos en la configuración de un punto

Existe también la posibilidad de usar el "Analizador de funciones" . Es una herramienta muy completa que incluye una tabla de valores.



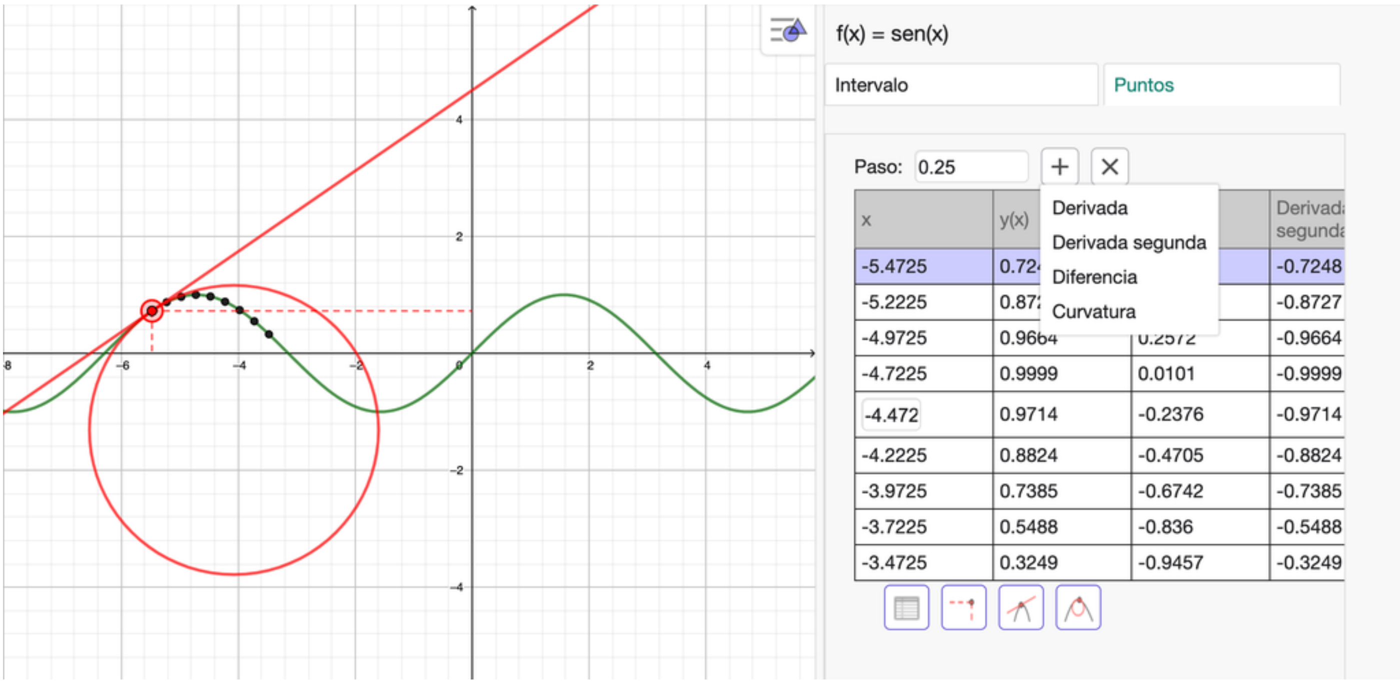


Fig. 3-1a y 1b Analizador de funciones

Basta con clicar en la función una vez seleccionada la herramienta. Su uso es muy sencillo e intuitivo. Podemos modificar el rango de valores moviendo los puntos extremos del intervalo de la función que se destaca en la Vista Gráfica o bien introduciendo los valores en la parte inferior de la ventana del Analizador, en la pestaña “Intervalo”.

En esta lista encontraréis todas las herramientas para las funciones. Y añadimos esta otra (sin actualizar por lo que algunos comandos quizás se hayan modificado o ya no existan) más completa. De hecho, la colección de comandos de GeoGebra es muy completa y se puede hallar aquí. Finalmente, aquí tenéis la lista de operadores y funciones.

Derivadas e integrales con GeoGebra.

Para calcular una derivada de cualquier orden basta con escribir f’, f’’ directamente en la Entrada o bien usar los comandos Derivada(Función) o Derivada(Función,Número).

- Podemos visualizar la construcción de la derivada de una manera muy sencilla.
- Dibujamos una función introduciendo su expresión en la Entrada.
- Ponemos un punto sobre la función.
- Dibujamos la tangente a la función en este punto con la herramienta “Tangentes” , clicando en el punto y en la función.
- Clicamos en la tangente con la herramienta “Pendiente” . Se visualiza la pendiente en la Vista Gráfica.
- Si *m* es el nombre de la pendiente en la Entrada escribimos: (x(A),m). Mostramos el trazo del punto obtenido.
- Animamos el punto A y observamos la curva que describe el punto que hemos creado.
- Dibujamos la derivada y comparamos con el rastro. Coinciden como cabía esperar.
- Podemos añadir la “decoración” que creamos conveniente con textos, colores dinámicos de los puntos (o de la tangente), etc.

Para la integral de una función usaremos los comandos Integral(Función) o Integral(Función, Extremo superior del intervalo, Extremo inferior del intervalo). Con el segundo comando se visualiza el área bajo de la función.

Podemos repetir la construcción anterior substituyendo la tangente por este segundo comando con x(A) como extremo superior del intervalo. El extremo inferior lo podemos obtener a partir de un punto en el eje de abscisas. Si a és el nombre del área que visualiza GeoGebra, escribiremos como punto (x(A),a).

Para la introducción al tema de la Integral en el aula disponemos de unos comandos muy útiles.

Fig. 3-2 Comandos para visualizar el concepto de integral

Bastará crear un deslizador con valores enteros (de 1 a lo que queráis) para incluirlo en el comando. Es interesante ver el resultado exacto de la integral y compararlo con el que dan los comandos.

No hay que olvidar los comandos sobre límites que también servirán para explicar el concepto en el aula.

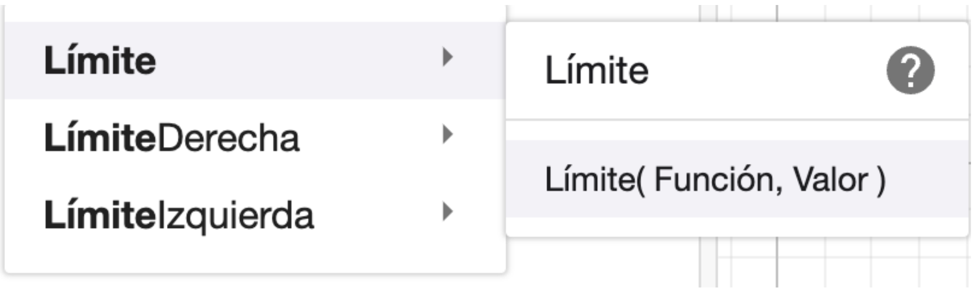


Fig. 3-3 Comandos para el cálculo de límites de funciones

Los detalles sobre estos comandos están en la colección de comandos citada más arriba.

Funciones a trozos

El problema de dibujar funciones a trozos en la pizarra se acaba con GeoGebra. El procedimiento es muy sencillo.

- Dibujamos n puntos en el eje de abscisas, siendo n-1 el número de trozos desde el primer punto hasta el último o n+1 si el intervalo incluye todo el eje. Supongamos que tenemos tres trozos definidos por los puntos A, B, C y D y tres funciones f, g y h que definiremos previamente.
- En la Entrada escribimos: **Si(x(A)<x<x(B),f, x(B)<x<x(C),g, x(C)<x<x(D),h)**. Los signos también pueden ser <= y >=. Si queremos ampliar el intervalo a todo el eje de abscisas bastará con substituir (por ejemplo) x(A) por **-inf** y x(D) por **inf**. Más sencillo imposible.
- También podemos poner directamente las funciones en la expresión de manera que, “arrastrando” la Entrada a la Vista Gráfica con el ratón nos ahorraríamos también escribir el texto con la función a trozos.
- También podemos definir los trozos uno a uno. Por ejemplo escribiendo la expresión Función(f,x(A),x(B)) y sucesivamente con g y h pero se limitan las posibilidades que tendríamos con la primera opción puesto que serían tres funciones en lugar de una.
- Podemos poner un punto sobre la función como ya hemos visto y dibujar tangentes y lo que haga falta.

En este video podréis ver como introducir texto usando la opción “**Fórmula LaTeX**”. También podemos rotar textos con el comando “**Rota Texto**”.

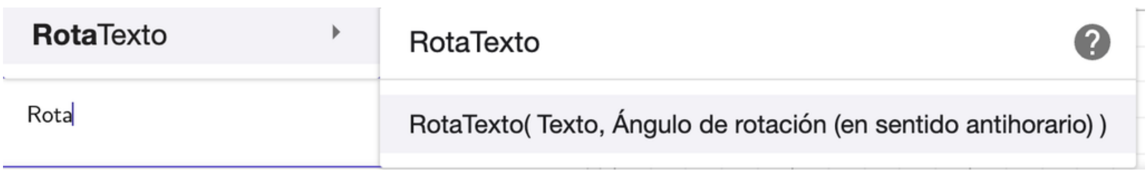


Fig. 3-4 Comando para rotar texto

https://www.youtube.com/embed/ml3yS9wtEmI

Transformación de funciones. Función inversa

Podemos transformar funciones con las herramientas correspondientes (simetrías, rotaciones, homotecias y traslaciones). Basta con elegir la transformación y clicar en la función. También se pueden aplicar dos transformaciones a la vez, pero solo desde la línea de Entrada. GeoGebra da como resultado una curva con un parámetro t. La sintaxis general de una curva es

> **Curva (Expresión, Expresión, Parámetro, Valor inicial, Valor final)**

Lo podemos ver en la imagen adjunta transformando una función (color rojo) con una rotación respecto a un punto (color azul) y luego con una simetría respecto del eje Y (color verde). Observad que el comando es **Refleja** mientras que la herramienta se denomina Simetría.

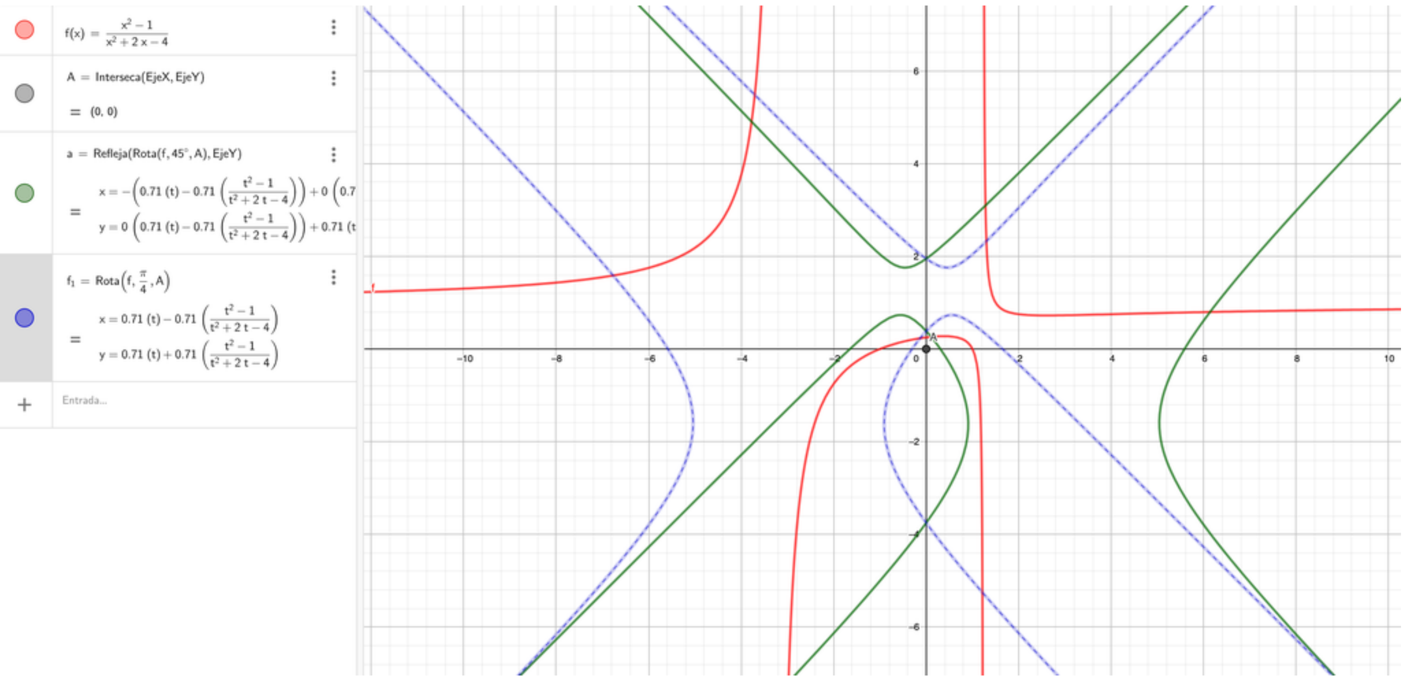


Fig. 3-5 Transformaciones de una función

Para la función inversa tenemos el comando **Inversa(Función)** aunque no funcionará si el resultado no es una función. Probad que sucede en el caso de la función sin(x).

Podemos recurrir entonces a la construcción habitual a partir de una simetría respecto de la recta y=x, bisectriz del primer cuadrante.

Fig. 3-6 Gráfica de la inversa de una función

Optimización

Hay una gran variedad de problemas de optimización y nos limitaremos aquí a una construcción, aunque volveremos sobre esta cuestión cuando salgamos de Planilandia.

Conviene primero configurar la medida de ángulos en radianes clicando en el icono de configuración de la barra de Estilos de la Vista Algebraica. La opción aparece en la parte inferior de la pestaña.

- Construimos una elipse con la herramienta correspondiente . Clicamos en dos puntos (los focos) y en un punto que pertenecerá a la elipse.
- Dibujamos un punto sobre la elipse (que no sea el mismo que el anterior)
- En la Entrada escribimos:
  - Ejes(nombre de la elipse)
  - Centro(nombre de la elipse)
- Por el punto sobre la elipse trazamos paralelas a cada uno de los ejes con la herramienta “Recta paralela” y el simétrico del punto respecto al centro de la elipse con la herramienta “Simetría central” .
- Dibujamos un rectángulo con los cuatro puntos. Es un cuadrilátero que GeoGebra nombrará c1 (si no hemos dibujado otro anteriormente) cuyo valor coincide con el área del rectángulo.
- Calculamos el ángulo (mejor en el sentido contrario a las agujas del reloj) que forman uno de los focos, el centro de la elipse como vértice y el punto sobre la elipse. Si el ángulo es a definiremos un punto de coordenadas (a,c1/10). Tened en cuenta que los valores de c1 pueden ser grandes. Activamos el rastro de dicho punto.
- Movemos el punto sobre la elipse y observamos que sucede. Se vislumbra una curva con los puntos del rastro.
- Usaremos una herramienta muy interesante del programa, el “**Lugar geométrico**” . Clicamos en el punto que hemos creado (punto del lugar geométrico) y luego en el punto sobre la elipse (punto en un objeto o en un deslizador). Aparece dibujada la curva que trazaban los puntos del rastro y sobre la misma se desplaza el punto que hemos creado.
- Si modificamos los puntos con los que hemos definido la elipse veremos que la curva del lugar geométrico también cambia.

Aunque GeoGebra no nos da la expresión de la función podemos mirar de deducirla usando las herramientas denominadas “**Ajustes**”. Tenemos que dibujar una serie de puntos sobre el lugar geométrico y crear una lista con ellos poniéndolos entre llaves {}.

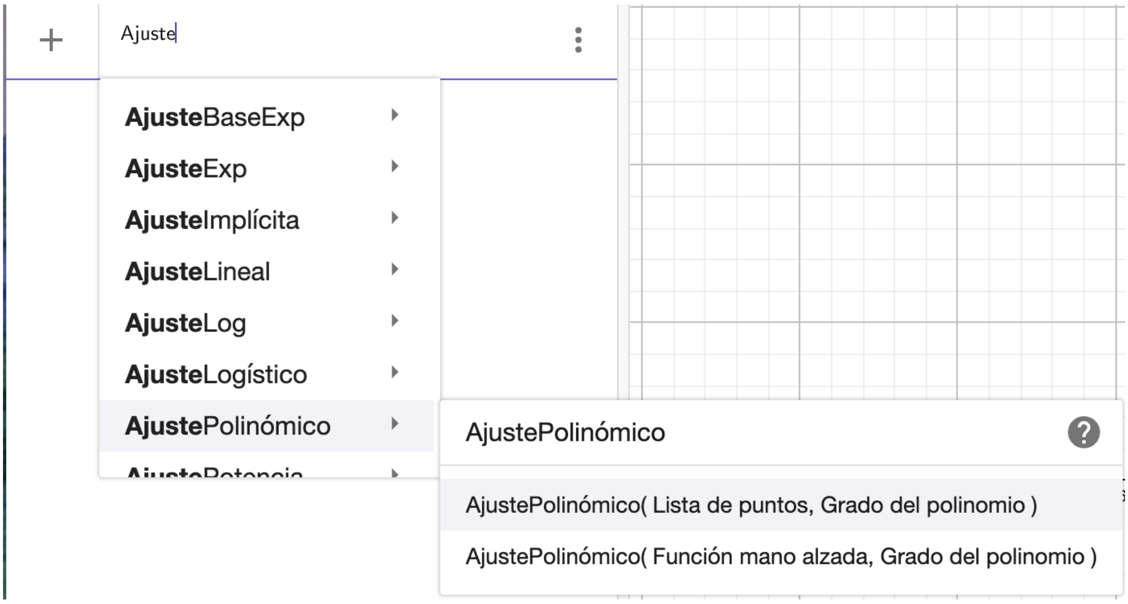


Fig. 3-7 Ajustes a partir de puntos con diferentes funciones

Conviene colocar los focos de la elipse en el eje de abscisas, simétricos respecto del origen, si queremos probar estos comandos.

Actividad 3

Proponed una función y haced un estudio completo de la misma con las herramientas que hemos visto en este módulo. Para modificar la escala de los ejes existe un procedimiento muy sencillo. Consiste en usar la herramienta “**Desplaza Vista Gráfica**” (que es una alternativa al ratón) y colocar la encima de los ejes. Se convierte en una doble flecha (hacia arriba y hacia abajo) y podemos “estirar” o “encoger” los ejes a voluntad arrastrándola con el ratón.

Con la estrategia que hemos usado en la construcción con la elipse, determinad el punto de la parábola $y = 27 – x^2$, situado en el primer cuadrante, tal que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en este punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima. Obtened el punto y el valor del área. Se trata de resolver gráficamente el problema usando el programa.